

1  
X Dans le plan affine euclidien, on se donne un cercle  $C$  de centre  $O$  et deux points  $A, B$  distincts.  
Quel est l'ensemble des points  $M$  du cercle qui minimisent la somme  $MA^2 + MB^2$  ?

-----  
Solution :

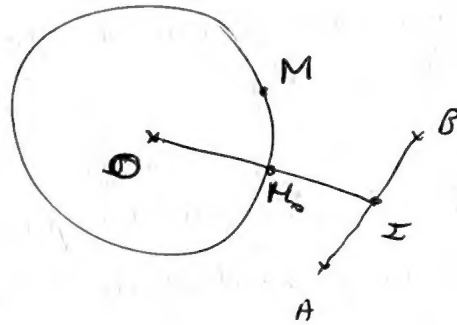
Soient  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et  $A, B$  deux pts distincts du plan.  
Chercher l'ensemble des points  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$  qui minimisent la somme  $MA^2 + MB^2$ .

1<sup>re</sup> solution:

Soit  $I$  milieu de  $[AB]$ .

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$  donc tout revient à minimiser la distance  $MI$  quand  $M$  parcourt  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\{M_0\} = \mathcal{C} \cap [O, I]$



1<sup>er</sup> cas :  $I$  extérieur au cercle.

Alors  $M_0 \in [OI]$  et tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{M_0\}$

vérifier :

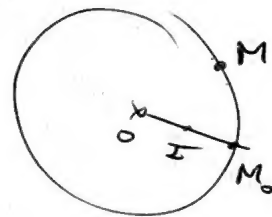
$$\begin{aligned} M \notin [OI] &\Leftrightarrow OI < OM + MI \Rightarrow \cancel{OM_0} + M_0I < \cancel{OM} + MI \\ &\Rightarrow M_0I < MI \end{aligned}$$

2<sup>e</sup> cas :  $I$  intérieur au cercle

Alors  $I \in [OM_0]$  et tout  $M \in \mathcal{C} \setminus \{M_0\}$

vérifier

$$\begin{aligned} I \notin [OM] &\Leftrightarrow OM < OI + IM \\ &\Rightarrow OM_0 < OI + IM \\ &\Rightarrow \cancel{OI} + IM_0 < \cancel{OI} + IM \end{aligned}$$



Cf : l'ensemble  $\mathcal{P}$  cherché est  $\{M_0\}$ .

2<sup>e</sup> solution :

$$AB^2 = (\vec{AM} + \vec{MB})^2 \\ = AM^2 + MB^2 + 2 \vec{AM} \cdot \vec{MB}$$

$$\text{donc } MA^2 + MB^2 = AB^2 + 2 \vec{MA} \cdot \vec{MB}$$

Tout revient à minimiser le produit scalaire  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ .

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MO^2 + \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ = r^2 + \frac{1}{2} \vec{MO} \cdot \vec{OI} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} \quad \text{car } I \text{ milieu de } [AB].$$

Il faut minimiser  $\vec{MO} \cdot \vec{OI} = \vec{MO} \cdot \vec{OI}$ . car  $(\vec{MO}, \vec{OI})$ , le cos  $\cos(\vec{MO}, \vec{OI}) = -1$ .  
Cela équivaut à  $(\vec{MO}, \vec{OI}) = \pi$  ( $2\pi$ ), ie  $(\vec{OM}, \vec{OI}) = 0$  ( $2\pi$ ), ie  
 $M \in [OI)$ .

Conclusion : Le minimum de l'expression est atteint quand M parcourt le cercle  $\mathcal{C}$  est atteint en M intersection de  $[OI)$  et  $\mathcal{C}$ .  $\square$

(NB : On obtient aussi le maximum de l'expression  $MA^2 + MB^2$  en prenant le pt diam opposé à M)

